

单摆法测重力加速度实验报告

姓名：熊逸飞
学号：PB24000048
学院：少年班学院

2025 年 4 月 9 日

指导老师：文义钧
学校：中国科学技术大学

摘要

本实验通过单摆法测定重力加速度，采用视频追踪软件进行数据分析。实验结果表明，单摆的周期与摆长和重力加速度之间通过线性拟合可以得到较好的结果。最终测得的重力加速度为 $g = 9.793(15) \text{ m/s}^2$ ，与合肥本地重力加速度相近。

关键词：单摆；重力加速度；线性拟合；视频追踪

1 引言

单摆是一种经典的物理实验，通过测量单摆的周期，可以计算出重力加速度。单摆的周期与摆长和重力加速度有关，利用这一关系，可以通过实验测定重力加速度的值。本文将介绍单摆法测定重力加速度的实验过程和结果分析。

2 实验原理

单摆的周期公式为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{d^2}{20l^2} - \frac{m_0}{12m} \left(1 + \frac{d}{2l} + \frac{m_0}{m} \right) + \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{\theta^2}{16} \right] \quad (2.1)$$

其中， T 为周期， l 为摆长， g 为重力加速度， d 为小球的直径， m_0 为细线的质量， m 为小球的质量， ρ_0 为空气密度， ρ 为小球的密度， θ 为摆角。

在小角度摆动 ($\theta < 5^\circ$) 近似下，式 (2.1) 可简化为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.2)$$

此时通过测量摆长 l 和周期 T ，即可计算出重力加速度 g ：

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (2.3)$$

3 实验装置

- **单摆装置**

包括小球、摆线和支架等组成部分。

- **秒表**

- **尺子**

钢卷尺：用于测量摆线的长度。

游标卡尺：用于测量小球的直径。

- **摄像机**

代替手动记录秒表启停时间减小测量误差；拍摄视频导入视频追踪软件进行数据分析。

4 实验设计

4.1 不确定度公式推导

在式 (2.3) 中分别计算 g 对 l, T 的偏导数：

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \\ \frac{\partial g}{\partial T} = -8\pi^2 \frac{l}{T^3} = -2\frac{g}{T} \end{cases} \quad (4.4)$$

代入不确定度公式 $u_c(g) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 u_c^2(x_i)}$ 可得：

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l} \right)^2 + \left(\frac{2u_T}{T} \right)^2} \quad (4.5)$$

因此可通过测量 l, T 的不确定度来计算 g 的合成标准不确定度。

4.2 实验精度预估分析

- **摆长误差** 摆长 l 约为 70 cm，误差 Δl 约为 0.5 cm；
- **周期误差** 摆动周期 T 约为 1.68 s，测量误差 ΔT 约为 0.1 s。

设周期累积测量次数为 n ，要使误差小于 1% 应有

$$\frac{u_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{0.5}{70} \right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.1}{1.68n} \right)^2} < 1\% \quad (4.6)$$

解得 $n > 17$ ，即至少要测量 18 个累积时间才可以保证误差小于 1%。为了保证实验精度，实际测量约 30 个周期的累积时间。

5 实验步骤

5.1 固定摆长实验

1. 将小球挂在摆线的末端，通过观察摆线与平面镜的夹角，调整调节螺栓使得摆线与水平面垂直；
2. 使用游标卡尺测量小球的直径 d ，并记录数据；
3. 使小球自然静止悬挂，使用钢卷尺测量从小球上端到摆线悬挂点末端的距离 l_0 ，并记录数据；
4. 重置摄像机与秒表开始计时，拉动小球离开平衡位置一定小角度并在保持其静止的情况下释放；
5. 记录一定周期后停止计时，通过视频获得小球摆动的周期数 n 与总时长 t ；
6. 重复步骤 3-5，记录多组实验数据。

5.2 不定摆长实验

在固定摆长实验的步骤中，每次测量结束后调节摆线长度，并记录相应数据。

5.3 大角度摆实验

在固定摆长实验的步骤中，拉动小球离开平衡位置时拉动较大角度，不使用秒表计时而仅使用摄像机慢动作模式（720p, 240fps）记录小球摆动的轨迹约 30 s。

6 数据处理

6.1 固定摆长实验

6.1.1 摆长数据处理

表 1 摆线长数据

序号	1	2	3	4	5	6
摆长 / cm	68.70	68.20	68.40	68.10	68.40	68.30

摆线长数据如上表所示，经计算可得摆线平均长度 $\bar{l}_0 = \frac{1}{6} \sum (l_i) = 68.35 \text{ cm}$ ，由此可得不确定度 $u_{lA} = \sqrt{\frac{\sum (l_i - \bar{l}_0)^2}{6 \cdot (6 - 1)}} = 0.085 \text{ cm}$ 。

测得小球直径 $d = 2.20 \text{ cm}$ ，因此总摆长 $\bar{l} = \bar{l}_0 + \frac{d}{2} = 69.45 \text{ cm}$ 。

6.1.2 周期数据处理

表 2 周期数据

序号	1	2	3	4	5	6
周期数	29	29	30	30	30	30
总时间/s	48.58	48.55	50.20	50.14	50.22	50.23
平均周期/s	1.675	1.674	1.673	1.671	1.674	1.674

周期数据如上表所示，经计算可得平均周期 $\bar{T} = \frac{1}{6} \sum(T_i) = 1.674\text{s}$ ，由此可得不确定度 $u_{TA} = \sqrt{\frac{\sum(T_i - \bar{T})^2}{6 \cdot (6-1)}} = 5.4 \times 10^{-4}\text{s}$ 。

6.1.3 B 类不确定度分析

经估测和查询仪器允差^[1] 可得 B 类不确定度：

- $\Delta l = 0.02\text{ cm} \Rightarrow u_{lB} = \Delta l / 3 = 0.0067\text{ cm}$
- $\Delta T = 0.05\text{ s} \Rightarrow u_{TB} = \Delta T / 30 = 5.6 \times 10^{-4}\text{ s}$

6.1.4 结果计算与不确定度合成

由式 (2.3) 可得：

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2} = 9.787\text{ m/s}^2 \quad (6.7)$$

由式 (4.5) 可得：

$$u_g = \bar{g} \sqrt{\left(\frac{u_{lA}}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{u_{lB}}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{2u_{TA}}{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{2u_{TB}}{\bar{T}}\right)^2} = 0.015\text{ m/s}^2 \quad (6.8)$$

且相对误差 $\Delta = \frac{u_g}{\bar{g}} = 0.154\% < 1\%$ 。

由上述分析可得结果：

$$g = 9.787(15)\text{ m/s}^2 \quad (6.9)$$

6.1.5 角度修正

在考虑角度修正时，由式 (2.1) 可得：

$$g_1 = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)^2 = g_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)^2 \quad (6.10)$$

其中 g_0 为小角度近似下的重力加速度。将 $\theta = 4^\circ$ 代入可得 $g_1 = 9.793\text{ m/s}^2$ 。

因此得到修正后的结果：

$$g = 9.793(15)\text{ m/s}^2 \quad (6.11)$$

6.2 不定摆长实验

表 3 摆长与周期数据

序号	1	2	3	4	5	6
摆线长/cm	68.15	66.45	63.90	62.35	61.40	59.40
30 周期时间/s	50.17	49.50	48.69	48.10	47.65	46.95
摆长/cm	69.25	67.55	65.00	63.45	62.50	60.50
30 周期时间平方/s ²	2517.03	2450.25	2370.72	2313.61	2270.52	2204.30

对摆长与 30 周期时间平方数据进行正比例线性拟合, 得到拟合线 $t^2 = kl$, 其中 $k = 36.38$, 相关系数 $r = 0.9992$ 。拟合数据如下图所示。

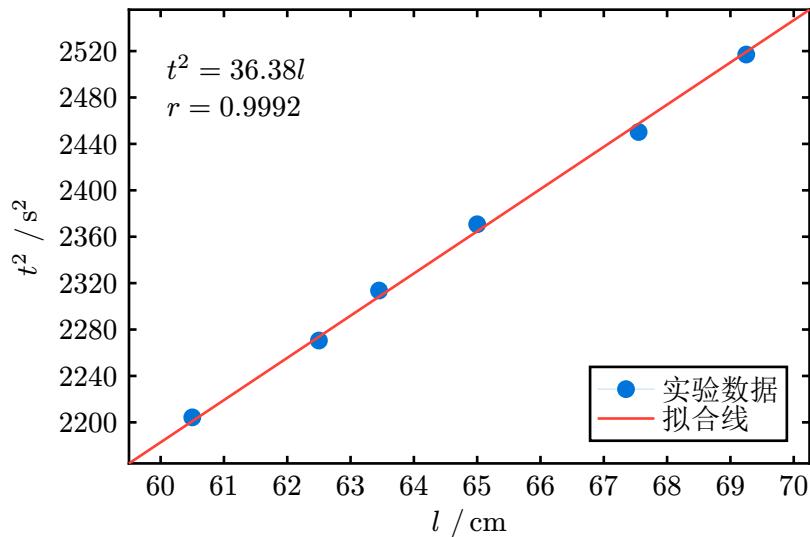


图 1 单摆周期与摆长关系

由式 (2.3) 及 $t = 30T$ 可得:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = 4\pi^2 \frac{30^2}{k} = \frac{3600\pi^2}{k} = 9.766 \text{ m/s}^2 \quad (6.12)$$

6.3 大角度摆实验

使用 Tracker 导入并分析视频数据, 如下图所示:

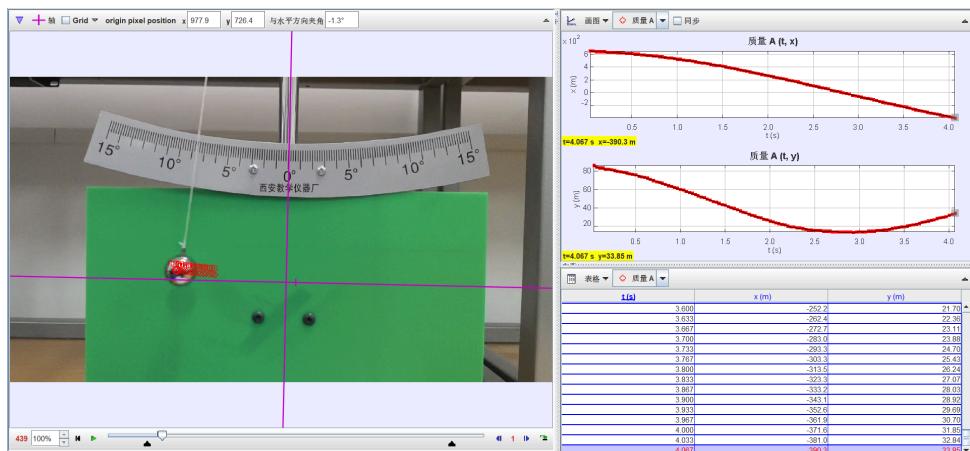


图 2 Tracker 拟合界面

追踪得到的小球在不同时间的位移数据如下图所示：

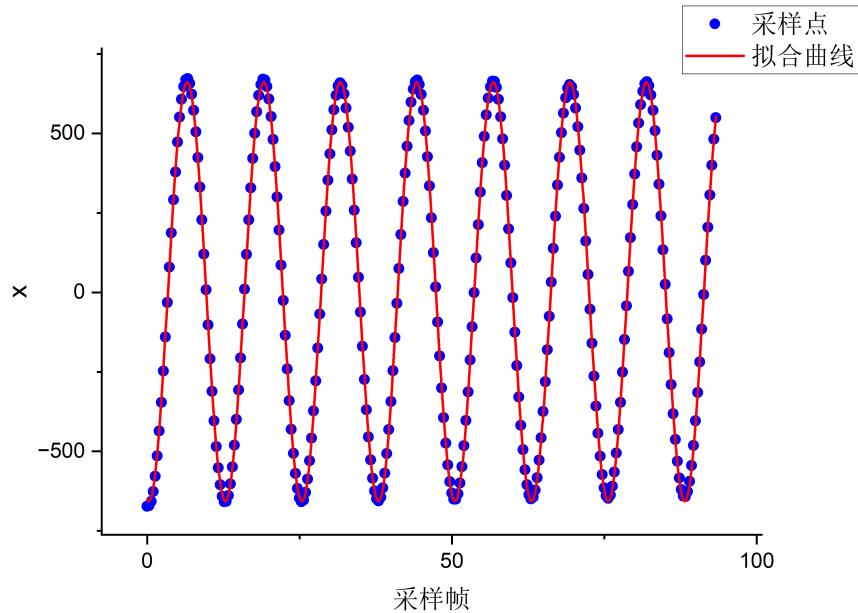


图 3 Tracker 拟合数据

由拟合结果可以看出大角度摆时，单摆的轨迹呈现为正弦曲线，且拟合情况较好。

7 实验结论

本实验在固定摆长实验（基础实验）中得到了 $g = 9.793(15) \text{ m/s}^2$ 的结果，与合肥本地重力加速度 $g = 9.794 \text{ m/s}^2$ 相近；在不定摆长实验（提高实验）中，得到了 $g = 9.766 \text{ m/s}^2$ 的结果，其中相关系数 $r = 0.9992$ ；在大角度摆实验（进阶实验）中，得到了小球在不同时间的位移数据，并通过正弦曲线拟合得到了较好的结果。

参考文献

- [1] 张增明, 大学物理实验, 第 1 版 本. 北京: 高等教育出版社, 2024.

附录

中国科学技术大学

(基础)

L(不含底)(cm) T(s)

n(周期)

碰: $d = 2.20 \text{ cm}$ 68.70 48.58 29

68.10 48.55 29

68.40 50.20 30

68.10 50.14 30

68.40 50.22 30

68.30 50.23 30

(提升)

68.15 50.17 30

66.45 49.50 30

63.90 48.69 30

62.35 48.10 30

61.40 47.65 30

59.40 46.95 30

tracker 59.9

PB24000048 魏逸飞

PB24000025 赵子浩

实验原始数据