

# 切变模量实验报告

姓名：熊逸飞

学号：PB24000048

学院：少年班学院

2025 年 5 月 4 日

指导老师：曹艺蓝

学校：中国科学技术大学

## 摘要

本实验通过扭摆法测定了钢丝的切变模量，并对其进行了不确定度分析。实验利用双周期作差的方案将切变模量转化为了可测量量，并通过多次测量、累计统计的方法提高了测量的精度，最终测得的切变模量为  $G = 8.16(8) \times 10^{10} \text{ Pa}$ 。

**关键词：**扭摆；扭转模量；切变模量；不确定度分析

## 1 引言

切变模量是材料力学中的一个重要参数，描述了材料在剪切变形下的刚度。通过实验测定切变模量，可以为材料的力学性能分析提供重要依据。本文将介绍通过扭摆法测定切变模量的实验过程、数据处理和结果分析。

## 2 实验原理

对于一根上下均匀而细长的钢丝，当其一端固定，另一端施加扭矩时，钢丝会发生扭转变形。在弹性限度内，钢丝切应力  $\tau$  正比于切应变  $\gamma$ ，即：

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2.1)$$

比例系数  $G$  即为切变模量。

考虑当钢丝扭转角度为  $\varphi$  时的情况，此时钢丝截面中距轴线距离为  $\rho$  的微元切应变为：

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dl} \quad (2.2)$$

则对于钢丝的一个截面，其恢复力矩为：

$$M = \iint_S \tau(\rho) \cdot \rho dS = \int_0^R \left( G \rho \frac{d\varphi}{dl} \right) \rho \cdot 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} \pi G R^4 \frac{d\varphi}{dl} \quad (2.3)$$

由钢丝总长 $L$ 和扭转角度 $\varphi$ ，可以得到 $\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\varphi}{L}$ ，代入式 (2.3) 可得：

$$M = \frac{1}{2}\pi GR^4 \frac{\varphi}{L} \quad (2.4)$$

再考虑钢丝与其下方的圆盘构成的扭摆，其满足 $M = D \cdot \varphi$ ，代入式 (2.4) 可得：

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4} \quad (2.5)$$

又由扭摆的转动方程 $M = I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 可得：

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (2.6)$$

由于扭摆形状不规则， $I_0$ 难以求得，因此将一质量为 $m$ 、内外半径分别为 $r_{\text{内}}, r_{\text{外}}$ 的圆环对称放在扭摆圆盘上，构成新的系统。此时其周期为：

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + \frac{1}{2}m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{D}} \quad (2.7)$$

联立式 (2.6) 与式 (2.7) 即可消去 $I_0$ ，解得：

$$D = 2\pi^2 m \frac{r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{1}{2}\pi^2 m \frac{d_{\text{内}}^2 + d_{\text{外}}^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (2.8)$$

将式 (2.8) 代入式 (2.5) 可得：

$$G = \frac{\pi L m (d_{\text{内}}^2 + d_{\text{外}}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)} = \frac{16\pi L m (d_{\text{内}}^2 + d_{\text{外}}^2)}{D_w^4 (T_1^2 - T_0^2)} \quad (2.9)$$

因此，通过测量扭摆的周期 $T_0, T_1$ 、圆环的质量 $m$ 、内外直径 $d_{\text{内}}, d_{\text{外}}$ 、钢丝长度 $L$ 和直径 $D_w$ ，即可计算出扭转模量 $D$ 与切变模量 $G$ 。

### 3 实验装置

- **扭摆：**由圆盘、金属环、钢丝和支架组成（如右图），其中金属环用于调整扭摆的转动惯量。
- **长度测量工具**
  - 螺旋测微器：用于测量钢丝直径；
  - 游标卡尺：用于测量金属环内外半径；
  - 钢卷尺：用于测量钢丝长度。
- **秒表：**用于测量扭摆的周期。

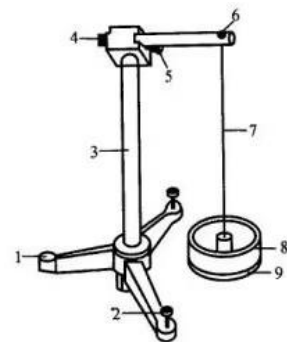


图 1 扭摆结构示意图

## 4 实验设计

在式 (2.9) 中计算  $D, G$  对各测量值的偏导数, 代入不确定度公式  $u_c(x_c) = \sqrt{\sum_{x_i} \left( \frac{\partial x_c}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2}$  可得:

$$\frac{u_D}{D} = \sqrt{\left( \frac{u_m}{m} \right)^2 + \frac{(2d_{\text{内}} u_{d_{\text{内}}})^2 + (2d_{\text{外}} u_{d_{\text{外}}})^2}{(d_{\text{内}}^2 + d_{\text{外}}^2)^2} + \frac{(2T_1 u_{T_1})^2 + (2T_0 u_{T_0})^2}{(T_1^2 - T_0^2)^2}} \quad (4.10)$$

$$\frac{u_G}{G} = \sqrt{\left( \frac{u_L}{L} \right)^2 + \left( \frac{u_D}{D} \right)^2 + \left( \frac{4u_{D_w}}{D_w} \right)^2} \quad (4.11)$$

根据实验数据估测有:

- 钢丝长度  $L = 50 \text{ cm}$ , 测量误差  $\Delta L = 0.1 \text{ cm}$ ;
- 圆环质量  $m = 0.55 \text{ kg}$ , 测量误差  $\Delta m = 0.1 \text{ g}$ ;
- 圆环内外直径  $d_{\text{内}} = 80 \text{ mm}$ ,  $d_{\text{外}} = 100 \text{ mm}$ , 测量误差  $\Delta d = 0.02 \text{ mm}$ ;
- 钢丝半径  $D_w = 0.8 \text{ mm}$ , 测量误差  $\Delta D_w = 0.004 \text{ mm}$ ;
- 扭摆周期  $T_0 = 2.5 \text{ s}$ ,  $T_1 = 3.5 \text{ s}$ , 测量误差  $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ 。

经过估算可以得到  $\frac{4u_{D_w}}{D_w}$  为主要误差项, 因此使周期测量误差  $\frac{2\sqrt{T_1^2 + T_0^2}}{T_1^2 - T_0^2} \cdot \frac{u_t}{n} < \frac{1}{3} \cdot \frac{4u_{D_w}}{D_w}$  即可。代入具体数据解得  $n > 43$ , 因此实际测量 45 个周期的累积时间以保证实验精度。

## 5 实验步骤

1. 组装并调整扭摆, 使钢丝夹具在圆盘正中心, 调整底座上的调节螺栓使得扭摆与水平面平行;
2. 使用螺旋测微器 (先测量零误差) 在钢丝上、中、下部分别测量直径  $D_w$ , 并记录共约 10 组数据;
3. 使用游标卡尺 (先测量零误差) 测量金属环内外直径  $d_{\text{内}}, d_{\text{外}}$  各 3 次, 并记录数据;
4. 使用钢卷尺测量钢丝长度  $L$  (上夹具下端至下夹具上端) 3 次, 并记录数据;
5. 将扭摆旋转约  $1 \text{ rad}$  后释放, 使用秒表分别测量不带金属环、带金属环的扭摆 45 周期所需时间各 3 次, 并记录数据;
6. 进行数据处理与误差分析。

## 6 数据处理

### 6.1 钢丝直径

表 1 钢丝直径数据

组别	下段			中段				上段		
序号	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
测量值/mm	0.770	0.768	0.769	0.771	0.771	0.769	0.772	0.778	0.778	0.775

钢丝直径测量数据如上表所示, 同时测得零误差为  $-0.004 \text{ mm}$ 。

经计算可得钢丝平均直径  $\overline{D_w} = \frac{1}{10} \sum D_i - D_0 = 0.776 \text{ mm}$ , 标准不确定度  $u_{D_w} = \sqrt{\frac{\sum [(D_i - D_0) - \overline{D_w}]^2}{10 \cdot (10 - 1)}} = 1.2 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

## 6.2 钢丝长度

表 2 钢丝长度数据

序号	1	2	3
测量值/cm	48.75	48.83	48.80

钢丝长度测量数据如上表所示。经计算可得钢丝平均长度  $\bar{L} = \frac{1}{3} \sum L_i = 48.79 \text{ cm}$ ，标准不确定度  $u_L = \sqrt{\frac{\sum [(L_i - \bar{L}) - \bar{L}]^2}{3 \cdot (3 - 1)}} = 0.024 \text{ cm}$ 。

## 6.3 圆环内外直径

表 3 圆环直径数据

组别	内直径			外直径		
序号	1	2	3	1	2	3
测量值/mm	79.88	79.90	79.86	100.18	100.24	100.18

圆环直径测量数据如上表所示，同时测得零误差为  $0.04 \text{ mm}$ 。

经计算可得圆环平均内直径  $\bar{d}_{\text{内}} = \frac{1}{3} \sum d_{\text{内}_i} - d_0 = 79.84 \text{ mm}$ ，标准不确定度  $u_{d_{\text{内}}} = \sqrt{\frac{\sum [(d_{\text{内}_i} - d_0) - \bar{d}_{\text{内}}]^2}{3 \cdot (3 - 1)}} = 0.012 \text{ mm}$ ；圆环平均外直径  $\bar{d}_{\text{外}} = \frac{1}{3} \sum d_{\text{外}_i} - d_0 = 100.16 \text{ mm}$ ，标准不确定度  $u_{d_{\text{外}}} = \sqrt{\frac{\sum [(d_{\text{外}_i} - d_0) - \bar{d}_{\text{外}}]^2}{3 \cdot (3 - 1)}} = 0.020 \text{ mm}$ 。

## 6.4 金属环质量

金属环质量为预测量量，查表可得  $m = 577.7 \text{ g}$ 。

## 6.5 扭摆周期

表 4 扭摆 45 周期时间数据

组别	不带金属环			带金属环		
序号	1	2	3	1	2	3
测量值/s	114.13	114.45	114.38	170.25	170.17	170.21

扭摆周期测量数据如上表所示。经计算可得金属环的扭摆平均周期  $\bar{T}_0 = \frac{1}{3 \cdot 45} \sum t_{0_i} = 2.5404 \text{ s}$ ，标准不确定度  $u_{T_0} = \sqrt{\frac{\sum [(t_{0_i}/45) - \bar{T}_0]^2}{3 \cdot (3 - 1)}} = 2.2 \times 10^{-3} \text{ s}$ ；带金属环的扭摆平均周期  $\bar{T}_1 = \frac{1}{3 \cdot 45} \sum t_{1_i} = 3.7824 \text{ s}$ ，标准不确定度  $u_{T_1} = \sqrt{\frac{\sum [(t_{1_i}/45) - \bar{T}_1]^2}{3 \cdot (3 - 1)}} = 5.2 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。

## 7 实验结果

### 7.1 扭转模量与切变模量计算

根据式 (2.8) 可得：

$$\overline{D} = \frac{1}{2}\pi^2 m \frac{\overline{d_{\text{内}}}^2 + \overline{d_{\text{外}}}^2}{\overline{T_1}^2 - \overline{T_0}^2} = 5.956 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.12)$$

根据式 (2.9) 可得：

$$\overline{G} = 16\pi \overline{L} m \frac{\overline{d_{\text{内}}}^2 + \overline{d_{\text{外}}}^2}{\overline{D_w}^4 (\overline{T_1}^2 - \overline{T_0}^2)} = 8.16 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (7.13)$$

### 7.2 B 类不确定度分析

经估测和查询仪器允差<sup>[1]</sup> 可得 B 类不确定度：

- 钢卷尺允差  $\Delta L = 0.12 \text{ cm} \Rightarrow u_{LB} = \Delta L/3 = 0.040 \text{ cm}$ ;
- 游标卡尺允差  $\Delta d = 0.02 \text{ mm} \Rightarrow u_{dB} = \Delta d/3 = 6.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$ ;
- 螺旋测微器允差  $\Delta D_w = 0.004 \text{ mm} \Rightarrow u_{DsB} = \Delta D_w/3 = 1.4 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

此外，秒表读取误差  $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ ，即  $u_{TB} = \Delta t/45 = 1.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ；金属环质量不考虑 A 类不确定度，因此  $u_m = u_{mB} = (\Delta m)/3 = 3.4 \times 10^{-5} \text{ kg}$ 。

### 7.3 不确定度合成

向式 (4.10) 与式 (4.11) 中代入具体数据可得相对不确定度与绝对不确定度：

$$\frac{u_D}{D} = 0.24\%, u_D = \frac{u_D}{D} \cdot D = 1.4 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.14)$$

$$\frac{u_G}{G} = 0.95\%, u_G = \frac{u_G}{G} \cdot G = 8 \times 10^8 \text{ Pa} \quad (7.15)$$

由上述分析可得最终测量结果：

$$D = 5.956(14) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.16)$$

$$G = 8.16(8) \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (7.17)$$

## 8 思考与讨论

在本实验中，扭摆旋转角度  $\varphi \approx 1 \text{ rad}$ ，代入式 (2.2) 可得：

$$\gamma = \frac{D_w}{2} \cdot \frac{\varphi}{L} = 7.953 \times 10^{-4} \ll 1 \quad (8.18)$$

因此本实验中的切应变  $\gamma$  远小于 1，满足线性弹性范围。

另外，本实验还通过多次测量（如钢丝直径、长度等）来提高测量精度，并测量 45 个周期来减小周期测量误差。

## 9 结论

本实验基于扭摆装置，测量了钢丝的扭转模量与切变模量，分别得到了  $D = 5.956(14) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$  与  $G = 8.16(8) \times 10^{10} \text{ Pa}$ 。通过不确定度分析，得到了相应的测量不确定度。实验结果表明，扭摆法是一种有效的测量材料切变模量的方法。

## 参考文献

- [1] 张增明, 大学物理实验, 第 1 版. 北京: 高等教育出版社, 2024.
- [2] 《切变模量的测量》. 2025 年.

## 附录

	下	中	上
零误差 $-0.004\text{mm}$	$0.770\text{mm}$	$0.771\text{mm}$	$0.778\text{mm}$
	$0.768\text{mm}$	$0.771\text{mm}$	$0.778\text{mm}$
	$0.769\text{mm}$	$0.769\text{mm}$	$0.775\text{mm}$
		$0.772\text{mm}$	
$L$	$48.75\text{cm}$	$48.83\text{cm}$	$48.80\text{cm}$

	内	外
零误差 $-0.04\text{mm}$	$79.88\text{mm}$	$100.19\text{mm}$
	$79.90\text{mm}$	$100.24\text{mm}$
	$79.86\text{mm}$	$100.18\text{mm}$

$T_0$	$1'54''13$	$T_1$	$2'50''25$	$L = 48.79\text{cm}$
	$1'54''45$		$2'50''17$	$m = 577.7\text{g}$
	$1'54''38$		$2'50''21$	$d_i = 79.84\text{mm}$
	$114.32$		$170.21$	$d_o = 100.16\text{mm}$
				$D = 0.776\text{mm}$
		PB 24000048		$T_1 = 3.7824\text{s}$
		熊逸飞		$T_0 = 2.5404\text{s}$
				$\Rightarrow G = 8.16 \times 10^{10} \text{Pa}$
				$D = 5.96 \times 10^{-3} \text{N}\cdot\text{m}$

曹艺蓝

4.7

曹艺蓝  
4.7

实验原始数据